جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان الفصل الأول ٢٠١٣-٢٠١٤
أسئلة مقرر التحليل التابعي (١)
لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي

المدة : ساعتان
العلامة : (١٠٠) درجة
الاسم :

السؤال الأول (١٠+١٠= ٢٠درجة) :

أ)- عرف المنظم الكلي ، ثم بين إنّ كل p- نصف نظيم على X هو منظم على X ، أما العكس غير صحيح دوما .

ب)- عرف الفضاء $C^m[a,b]$ ، ثم أثبت أنه فضاء خطي منظم مع النظيم

$$\|f\|_{C^m} = \|f\|_C + \|f'\|_C + \|f''\|_C + ... + \|f^{(m)}\|_C$$

حيث $\|f\|_C = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

السؤال الثاني (١٥ درجة) :

أثبت أن جميع النظائم في الفضاء الخطي المنظم ذي n بعدا تكون متكافئة فيما بينها .

السؤال الثالث (١٠+١٠= ٢٠ درجة) :

١)- هل الفضاء $C[a,b]$ هو فضاء هيلبرت أثبت ذلك .

٢)- بفرض H فضاء هيلبرت ولتكن $M \subset H$ عرف المجموعة $M^{\perp}$ ثم بيّن أنها تشكل فضاء جزئيا مغلقا في فضاء هيلبرت H.

السؤال الرابع (١٠+١٠= ٢٠درجة) :

أ)- بفرض H , K فضاءي هيلبرت عقديين . وليكن $T \in B(H,K)$. أثبت أن $(T^*)^* = T$ ثم بيّن أن $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

ب)- بفرض H فضاء هيلبرت العقدي و I مؤثر المطابقة على H, $T \in B(H), \lambda \in \mathbb{C}$ مؤثر ناظمي أثبت أن $T - \lambda I$ مؤثر ناظمي .

السؤال الخامس (٢٥ درجة) :

ليكن المؤثر T حيث : $T : \ell_2 \to \ell_2$ معرف بالآتي:

$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, ...) = (0, 4\xi_1, \xi_2, 4\xi_3, \xi_4, ...)$$

أثبت أن T مؤثر خطي ومحدود ثم أوجد $\|T\|$ وأوجد T^* .

انتهت الأسئلة
مع التمنيات بالنجاح والتوفيق

مدرس المقرر
الدكتور سامح العرجة

حمص في ٢٧ / ١ / ٢٠١٤م.

ومنه فإن $g(f)(u) \in Ker(T)$ وبالتالي $g(f)(Ker(T)) \subseteq Ker(T)$.
وبما أن التمثيل هو ذاتي عندئذ إما $Ker(T) = 0$ أو $Ker(T) = V$.
إذا كان $Ker(T) = V$ عندئذ يكون $T = 0$ وهذا يخالف الفرض.

جواب السؤال الأول (١٠+١٠=٢٠ درجة) :

أ)- تعريف المنظم الكلي : بفرض (X,d) فضاء متريا خطيا ولنعرف التابع $g(x)$:

$$g(x)=d(x,\theta)$$

حيث θ صفر الفضاء X.

عندئذٍ فإن g يحقق الشروط الآتية :

1) $g:X\to\mathbb{R}$

2) $g(x)=0 \Leftrightarrow x=\theta$

3) $g(x)=g(-x)\ :\ \forall x\in X$

4) $g(x+y)\le g(x)+g(y)$

5) إذا كانت $\lambda_0,\lambda_n\in\mathbb{C}$ و $a,x_n\in X$ بحيث إن :

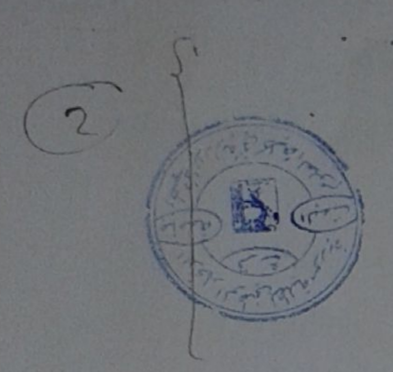
$\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda_0 \wedge x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ عندئذٍ يكون $g(x_n-a)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

وإذا كانت $\lambda_n x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda_0 a$ يكون $g(\lambda_n x_n-\lambda_0 a)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

إنّ كل p- نصف نظيم على X هو منظم على X. (العكس غير صحيح في العموم).

لدينا :

$$p(x+y)\le p(x)+p(y)$$
$$p(\lambda x)=|\lambda|p(x)$$



وبالتالي فإن :

$$p:X\to R$$
$$p(\theta)=p(0.x)=0$$
$$p(-x)=|-1|.p(x)=p(x)$$
$$p(x+y)\le p(x)+p(y)$$

لنبين أن :

$$p(\lambda_n x_n-\lambda_0 a)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0\ ;\ \lambda_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\lambda_0\wedge x_n\xrightarrow[n\to\infty]{} a$$
$$\lambda_0,\lambda_n\in\mathbb{C}\ ;\ x_n,a\in X$$

نضيف ونطرح $\pm\lambda_0 x_n$:

$$p(\lambda_n x_n-\lambda_0 a)\le|\lambda_n-\lambda_0|p(x_n-a)+|\lambda_0|p(x_1-a)+|\lambda_n-\lambda_0|p(a)$$

فمن كون $n\to\infty$ فإن :

$$p(\lambda_n x_n-\lambda_0 a)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

من تحقق هذه الشروط نجد أن P هو منظم .

ليكن لدينا : $g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^{p_k}\ ;\ p_k=\frac{1}{k},\ k\in N$

إن $g(x)$ منظم . نلاحظ أن : $g(2x)\neq 2.g(x)$ وبالتالي ليس كل منظم هو نصف نظيم .

ملاحظة: بما أن $f(t)(0)\in Ker(T)$ وبالتالي $f(t)(Ker(T))\subseteq Ker(T)$.
بما أن التمثيل ... عندئذٍ إما $Ker(T)=0$ أو $Ker(T)=V$.
إذا كانت $Ker(T)=V$ عندئذٍ يكون $T=0$ وهذا ينافي الفرض.

ب)- الفضاء $C^m[a,b]$ رمز لمجموعة كل التوابع التي تملك مشتقات موجودة ومستمرة حتى المرتبة m. لنثبت أولاً أنه فضاء خطي . بما أن $C^m[a,b]\subseteq C[a,b]$ يكفي أن نثبت أن : $\lambda f+\mu g\in C^m[a,b]$ من أجل $f,g\in C^m[a,b]\ \&\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$.وهذا محقق حسب خواص اشتقاق التوابع وجمعها . (يمكن للطالب إثبات تحقق شروط الفضاء الخطي فيحصل على علامة الفقرة) . وهنا العنصر الحيادي هو التابع الصفري ، وأن $-f^m$ نظير العنصر f^m .

ثانياً لنثبت أنه منظم بأن نبين أن النظيم المعرف على $C^m[a,b]$ يحقق شروط النظيم .

$$\|f\|_{C^m}=\|f\|_C+\|f'\|_C+\|f''\|_C+...+\|f^{(m)}\|_C$$

حيث $\|f\|_C=\max\limits_{x\in I}|f(x)|$.

1) $\|f\|_{C^m}=\|f\|_C+\|f'\|_C+\|f''\|_C+...+\|f^{(m)}\|_C\geq 0$

لأن كلا من $\|f\|_C,\|f'\|_C,\|f''\|_C,.....\|f^{(m)}\|_C$ محققة لشروط النظيم في $C[a,b]$ فجميعها موجبة . ويكون :

$$\|f\|_{C^m}=0\Leftrightarrow\|f\|_C+\|f'\|_C+\|f''\|_C+...+\|f^{(m)}\|_C=0\Leftrightarrow$$

$$\|f\|_C=\|f'\|_C=\|f''\|_C=...=\|f^{(m)}\|_C=0\Leftrightarrow f=0$$

2) $\|\lambda f\|_{C^m}=\|\lambda f\|_C+\|\lambda f'\|_C+\|\lambda f''\|_C+...+\|\lambda f^{(m)}\|_C=$

$$|\lambda|(\|f\|_C+\|f'\|_C+\|f''\|_C+...+\|f^{(m)}\|_C)=|\lambda|\,\|f\|_{C^m}$$

3)

$\forall f,g\in C^m[a,b]$ فإنه وحسب الشروط التي يحققها النظيم في $C[a,b]$ يكون :

$$\|f+g\|_{C^m}=\|f+g\|_C+\|f'+g'\|_C+\|f''+g''\|_C+...+\|f^{(m)}+g^{(m)}\|_C\leq$$

$$\leq\|f\|_C+\|f'\|_C+\|f''\|_C+...+\|f^{(m)}\|_C+\|g\|_C+\|g'\|_C+\|g''\|_C+...+\|g^{(m)}\|_C=\|f\|_{C^m}+\|g\|_{C^m}$$

نستنتج أن شروط النظيم محققة وبالتالي $C^m[a,b]$ فضاء خطي منظم مع النظيم المعطى $\|f\|_{C^m}$.

جواب السؤال الثاني (١٥ درجة) :

ليكن E أي فضاء خطي منظم بحيث $\dim E=n$ فتوجد فيه قاعدة $x_1,x_2,.......x_n$ بحيث أن كل عنصر $x\in E$ يكتب بشكل وحيد كما يلي :

$$x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i \quad \text{(حيث : } \lambda_1,\lambda_2,......,\lambda_n \text{ أعداد مناسبة)}$$

ليكن الآن $\|\bullet\|$ أي نظيم في E ولنبرهن أنه يكافئ النظيم $\|\bullet\|_0$ المعرّف بالشكل $\|x\|_0=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|$.

ينتج أن $\varphi(f)(u)\in Ker(T)$ وبالتالي $\varphi(f)(Ker(1))\subseteq Ker(T)$.
وبما أن التشاكل ... عندئذ إما $Ker(T)=0$ أو $Ker(T)=V$.
إذا كان $Ker(T)=V$ عندئذ يكون $T=0$ وهذا يناقض الفرض .

لدينا : $\| x \| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| . \| x_i \| \leq \max_i \| x_i \| . \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| = \max_i \| x_i \| . \| x \|_0$ (2)

فإذا وضعنا $A := \max_i \| x_i \| > 0$ لوجدنا : $\| x \| \leq A . \| x \|_0 \qquad (1)$

لنأخذ في $\mathbb{C}^n$ المجموعة المغلقة والمحدودة S : $S = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n \ ; \ \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| = 1 \right\}$ (2)

ونعرّف عليها التابع العددي f بالشكل التالي : $f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n) := \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\|$

فنجد أنّ $0 < f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n)$ لأنه لو كان $f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n) = 0$ لنتج أنّ $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \theta$ (2)

وبالتالي فإنّ $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots\ldots \lambda_n = 0$ (بسبب الاستقلال) وهذا غير ممكن حسب تعريف S .

الآن بما أن : $\big| \| x \| - \| y \| \big| \leq \| x - y \|$ نجد أنّ :

$$\left| f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) - f(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \right| = \left| \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\| - \left\| \sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k \right\| \right|$$

$$\leq \left\| \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \mu_k) x_k \right\| \leq \max \| x_k \| . \left\| \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \mu_k) \right\| = A . \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k - \mu_k| \xrightarrow[\lambda_k \to \mu_k]{} 0$$

أي أن التابع مستمر .

إذن S مجموعة محدودة ومغلقة وأن f مستمر وموجب تماماً، فله قيمة حديّة صغرى موجبة على S .

لنفرض أنّ : $0 < \inf f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n) := \frac{1}{B}$ (2)

عندئذٍ من أجل كل عنصر $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ من E بحيث $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| = 1$ يكون :

$$\frac{1}{B} \leq f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \left\| \sum_{1}^{n} \lambda_k x_k \right\|$$

لنأخذ الآن أي عنصر $x \in E$. عندئذٍ $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ حيث $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$ أعداد ليست (2)

جميعها أصفاراً (وليس بالضرورة أن يكون $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| = 1$) فيكون لدينا:

$$\| x \| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . \frac{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|}{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|} . x_i \right\|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| . \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|} . x_i \right\| \geq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| . \frac{1}{B} = \frac{1}{B} . \| x \|_0$$ (1)

نلاحظ أن $S(f)(u) \in Ker(T)$ وبالتالي $S(f)(Ker(T)) \subseteq Ker(T)$.
وبما أن النواة فضاء جزئي غير تافه إما $Ker(T) = 0$ أو $Ker(T) = V$.
وإذا كان $Ker(T) = V$ عندئذٍ يكون $T = 0$ وهذا يناقض الفرض .

اي : (2) $\|x\|_0 \le B.\|x\|$

من (1),(2) نجد أن النظيمين متكافئان .

ولما كان $\|x\|$ اختيارياً على الفضاء E هذا يعني أن النظيم $\|x\|_0$ يكافئ اي نظيم معرف على E وبالتالي جميع النظائم تكون متكافئة .

جواب السؤال الثالث (١٠+١٠=٢٠درجة) :

١) إن الفضاء $C[a,b]$ ليس فضاء جداء داخلي ، وبالتالي فإنه ليس فضاء هيلبرت .

سنبين أنّ النظيم المعرف بالمساواة $\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$ لا يمكن أن يولد من جداء داخلي لكونه لا يحقق مساواة متوازي الأضلاع وفي الحقيقة إذا أخذنا: $x(t)=1$ و $y(t)=\frac{t-a}{b-a}$ فإننا نجد أن : $\|x\|=1$ و $\|y\|=1$ وأن:

$$x(t)+y(t)=1+\frac{t-a}{b-a}$$

$$x(t)-y(t)=1-\frac{t-a}{b-a}$$

من هنا نجد أنّ $\|x+y\|=2$ و $\|x-y\|=1$ وأنّ $2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)=4$

في حين أنّ : $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=5$

بذلك فإن مساواة متوازي الأضلاع غير محققة.

٢)- ليكن x_1,x_2 عنصرين من $M^\perp$ عندئذٍ أيا كان $y\in M$ فإن :

$$\langle \lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2 ,y\rangle=\lambda_1\langle x_1,y\rangle+\lambda_2\langle x_2,y\rangle=0+0=0$$

حيث λ_1,λ_2 عددان عقديان وبذلك يكون $\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2$ عنصراً من $M^\perp$.

لتكن $\{x_n\}$ أية متتالية من عناصر $M^\perp$ بحيث إن $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ ولنبرهن أن $x\in M^\perp$.

في الواقع أيا كان $y\in M$ يكون لدينا $\langle x,y\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle x_n,y\rangle=\lim_{n\to\infty}0=0$ إذا $x\in M^\perp$ وهذا يعني أن $M^\perp$ مغلقة .

جواب السؤال الرابع (١٠+١٠=٢٠ درجة) :

أ)- لنبين أولا أن $(T^*)^*=T$:

$(y,(T^*)^*x)=(T^*y,x)=\overline{(x,T^*y)}=\overline{(Tx,y)}=(y,Tx)$ وبالتالي فإن $(T^*)^*x=Tx$ وذلك من أجل كل $x\in H$ وبالتالي $(T^*)^*=T$.

ثانيا : بما أن $\|T\|=\|T^*\|$ فإن: $\|T^*T\|\le\|T^*\|.\|T\|=\|T\|^2$

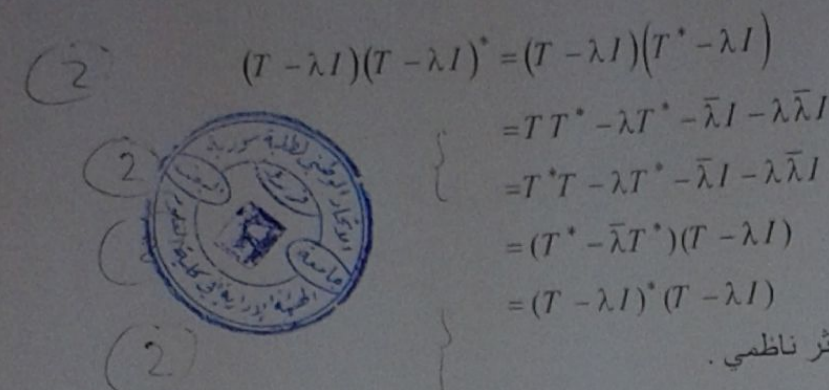
ومن جهة أخرى :

$$\|Tx\|^2=(Tx,Tx)=(T^*Tx,x)\le\|T^*Tx\|\|x\|\le\|T^*T\|.\|x\|^2$$

وبالتالي $\|T\|^2 \le \|T^*T\|$ وهو المطلوب.

ب-) $(T-\lambda I)^* = T^* - \bar{\lambda} I$

نعلم أن: $T^*T = TT^*$



$$(T-\lambda I)(T-\lambda I)^* = (T-\lambda I)(T^* - \lambda I)$$
$$= TT^* - \lambda T^* - \bar{\lambda} I - \lambda\bar{\lambda} I$$
$$= T^*T - \lambda T^* - \bar{\lambda} I - \lambda\bar{\lambda} I$$
$$= (T^* - \bar{\lambda} T^*)(T-\lambda I)$$
$$= (T-\lambda I)^*(T-\lambda I)$$

وبالتالي فإن $T-\lambda I$ مؤثر ناظمي .

جواب السؤال الخامس (٢٥ درجة) :

إثبات الخطية: من أجل أي عنصرين $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,....)\ \&\ y=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,.....)$ من ℓ_2

و α,β من حقل الأعداد K فإن :

$$T(\alpha x+\beta y)=T(\alpha\xi_1+\beta\eta_1,\alpha\xi_2+\beta\eta_2,\alpha\xi_3+\beta\eta_3,....)=$$
$$(0,4(\alpha\xi_1+\beta\eta_1),(\alpha\xi_2+\beta\eta_2),4(\alpha\xi_3+\beta\eta_3),\alpha\xi_4+\beta\eta_4,....)=$$
$$\alpha(0,4\xi_1,\xi_2,4\xi_3,\xi_4,....)+\beta(0,4\eta_1,\eta_2,4\eta_3,\eta_4,...)=\alpha T(x)+\beta T(y)$$

إذن T خطي لأن : $T(\alpha x+\beta y)=\alpha T(x)+\beta T(y)$

المحدودية:

$$\|Tx\|^2 = \|(0,4\xi_1,\xi_2,4\xi_3,\xi_4,....)\|_{\ell_2}^2 = 16|\xi_1|^2+|\xi_2|^2+16|\xi_3|^2+....\le$$
$$\le 16\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2 \Rightarrow \|Tx\| \le 4\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

أي أن $\|Tx\| \le 4\|x\|$ (*) وبالتالي فإن المؤثر T محدود .

إيجاد النظيم : من المتراجحة (*) نجد أن :

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in\ell_2\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \le 4 \quad (1)$$

من جهة أخرى ، بأخذ $x=(1,0,0,....)$ فإن $\|x\|=1$ كما أن :